УДК 519.86 : 338.5.018.7

Н.Ю.КАРПЕНКО, канд. техн. наук, О.Н.ШТЕЛЬМА
Харьковская национальная академия городского хозяйства

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ДИНАМИКИ ТРУДОВЫХ РЕСУРСОВ

Рассматривается модель динамики трудовых ресурсов региона как системы замкнутого типа. Модель реализована в составе комплекса программных средств, который применяется для исследования механизма управления трудовыми ресурсами.

Специалист в области коммунального хозяйства должен владеть вопросами имитационного моделирования, понимать преимущества и недостатки его применения. В современной ситуации особый интерес представляет вопрос разработки математической базы для оценки динамики трудовых ресурсов. В настоящей работе рассмотрена одна из возможных моделей такого класса. Модель была реализована в составе комплекса программных средств, который с успехом применяется на кафедре ПМ и ИТ Харьковской национальной академии городского хозяйства для исследования механизма управления трудовыми ресурсами.

Современные условия экономической деятельности коренным образом изменили кадровую политику предприятий. Жесткая конкуренция, стимулирование роста производительности труда вызывает естественную тенденцию снижения количества производственных рабочих на предприятии при сохранении объемов производства. Однако, в условиях отсутствия экстенсивного роста экономики возникает ряд проблем, связанных с перераспределением высвобождаемой рабочей силы. В складывающихся условиях представляется необходимым изучение основных закономерностей динамики перераспределения трудовых ресурсов в предположении об относительной замкнутости моделируемого региона.

В частности, представляет интерес моделирование динамики резерва трудовых ресурсов в зависимости от экономического поведения предприятий. Эту зависимость реализует модель «Трудовые ресурсы» [1, 4, 5], которая направлена на определение обоснованных управленческих решений в условиях ограниченных трудовых ресурсов, когда последние рассматриваются как активные элементы системы, т.е. целенаправленно принимают решения в соответствии с «потенциалами привлекательности» предприятий [2, 4].

В модели рассматриваются n предприятий. Каждое предприятие обозначим индексом i, i=1,2,...,n. Предполагается, что система регионально замкнута относительно объема трудовых ресурсов, т.е. весь объем ресурсов L_t (численность трудящихся) в периоде t (t=1,2,...,T) распределен между предприятиями и резервом, объем которого составляет R (тыс. чел.).

Приток рабочей силы в регионе определяется естественным ростом с темпом η. Отток из региона отсутствует. Перераспределение происходит по определенным правилам в конце каждого периода t и зависит от результатов деятельности предприятий за истекший период.

Производственную функцию i-го предприятия представим так:

$$Y_{it} = F(K_{it}, L_{it}) \ . \quad (1)$$

Она описывает зависимость доли прибыли предприятия от имеющихся ресурсов: объема основных фондов K_{it} и численности трудящихся L_{it}. С помощью параметра управления (нормы накопления) S_{it} полученная доля прибыли распределяется на капитальные вложения

$$I_{it} = F(S_{it}, Y_{it}) \quad (2)$$

и фонд оплаты труда

$$C_{it} = (1 - S_{it})Y_{it} \ . \quad (3)$$

На управление S_{it} наложено ограничение

$$S^{mim} \le S_{it} \le S^{\max} \ . \quad (4)$$

В результате объем основных фондов на следующий период равен

$$K_{i,t+1} = K_{it} + I_{it} \ . \quad (5)$$

В качестве производственной функции в этой модели выбрано выражение [1, 2, 5]

$$Y_{it} = Y_{i0} \left(\frac{L_{it}}{L_{i0}} \right)^{\alpha+\beta} \left(\frac{K_{it}}{K_{i0}} \right)^{(1-\alpha)+\beta} , \quad (6)$$

где $Y_{i0} = Y_0$ – исходная прибыль каждого предприятия; $L_{i0} = L_0$, $K_{i0} = K_0$ – исходные численность трудящихся и объем основных фондов, исходные данные для всех предприятий принимаются одинаковыми.

Параметр $\beta > 0$ обеспечивает возрастающую отдачу на расширение масштаба производства, что стимулирует его развитие.

Пусть k^* – оптимальная фондовооруженность, причем при $k_i = \dfrac{K_i}{L_i} < k^*$ рост объема основных фондов предпочтительнее увеличению численности работающих, а при $k_i > k^*$ – наоборот.

Выберем единицы K_i и L_i так, чтобы $k^* = 1$. Тогда указанное свойство имеет место при соблюдении условия:

$$\alpha = \begin{cases} 1{,}5 \text{ при } L <= K, \\ 0{,}5 \text{ при } L > K, \end{cases}$$

и $\beta = 0{,}25$. В этом случае формула (6) примет вид:

$$Y_{it} = \begin{cases} Y_0 \left(\dfrac{L_{it}}{L_0} \right)^{1,75} \left(\dfrac{(K_{it})}{K_0} \right)^{-0,25} \text{ при } L_{it} \le K_{it}; \\ Y_0 \left(\dfrac{L_{it}\ K_{it}}{L_0 K_0} \right)^{0,75} \text{ при } L_{it} \ge L_{it}. \end{cases} \qquad (7)$$

Заметим, что при $L_{it} = K_{it}$, $L_0 = K_0$. Тогда

$$Y_{it} = Y_0 \left(\frac{L_{it}}{L_0} \right)^{1,5} = Y_0 \left(\frac{K_{it}}{K_0} \right)^{1,5}. \qquad (8)$$

Функция (7) при фиксированном K_{it} относится к так называемым S-образным кривым. Она непрерывна, но теряет гладкость в точке L=K.

Средняя заработная плата (СЗП) трудящихся на i-м предприятии выразится в виде:

$$C_{it} = \frac{C_{it}}{L_{it}} \begin{cases} (1 - S_{it})\ Y_0 \dfrac{(L_{it})^{0,75}}{(L_0)^{1,75}} \left(\dfrac{(K_{it})}{K_0} \right)^{-0,25} \text{ при } L_{it} \le L_{it}; \\ (1 - S_{it})\ Y_0\, (L_{it})^{-0,25} \left(\dfrac{K_{it}}{L_0 K_0} \right)^{0,75} \text{ при } L_{it} \ge L_{it}. \end{cases} \qquad (9)$$

Функция $C_{it}(L_{it})$ непрерывна и обладает единственным максимумом в точке L=K.

Рассмотрим механизм перераспределения трудовых ресурсов между n предприятиями и резервом по истечении периода t [2, 3-5]. Представим среднюю зарплату на предприятиях рассматриваемого региона в виде:

$$C_t^0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_{it}}{n}. \qquad (10)$$

Обозначим $h_{it} = \dfrac{C_{it} - C_t^0}{C_t^0}, A = \{i / h_i > 0\}, B = \{i / h_i <= 0\}$ **.**

Отток трудящихся с i-го предприятия ($i \in B$) определяется в виде [2]:

$$\Delta L_{it} = (e^{\gamma h_{it}} - 1) L_{it} \le 0 \ . \tag{11}$$

$$\Delta L_t = \sum_{i \in B} \Delta L_{it} \le 0 \ . \tag{12}$$

В данной модели $\gamma = 1$. Суммарный отток составляет величину

$$\Delta L_{it} = -\Delta L_t \frac{h_i t}{\sum_{i \in B} h_i t} \le 0 \ . \tag{13}$$

Притоки трудящихся для предприятий $i \in A$ определяются пропорционально величинам $h_i t$.

Общая численность трудящихся в регионе составит

$$L_t = \sum_{i=1}^{n} L_{it} + R_t \ , \tag{14}$$

где $R_0 = 0$.

Естественный прирост численности равен ηL_t. Условимся, что резерв R_t и естественный прирост распределяется между предприятиями равномерно. Тогда предложение рабочей для i-го предприятия в конце t-го периода составляет величину

$$P_{it} = \frac{\eta L_t + R_t}{n} + \Delta L_{it} \tag{15}$$

и оно может быть отрицательным. Каждое предприятие определяет прирост (высвобождение) рабочей силы Δl_{it} на следующий период из условия:

$$-L_{i,t} < \Delta l_{i,t} \le P_{i,t} . \tag{16}$$

Окончательно численность трудящихся в (t+1)-м периоде равна

$$L_{i,t+1} = L_{i,t} + \Delta l_{i,t} . \tag{17}$$

Тогда резерв равен

$$R_{t+1} = \sum_{i=1}^{n} (P_{it} - \Delta l_{it}) . \tag{18}$$

Анализ динамики трудовых ресурсов региона выполним из предположения, что каждое предприятие стремится максимизировать потребление. В модели это эквивалентно максимизации СЗП на предприятии. Модель позволяет сделать вывод, что при $C_{it}=C_t$ для всех $i=1,2,...,n$ система находится в равновесном состоянии, т.е. $\Delta L_{it} = 0$. Однако процесс имеет несколько неустойчивых состояний. Поэтому для сбалансированного развития нужно выбирать управление таким образом, чтобы попасть в устойчивую область ($L<K$). Поведение в неустойчивой области ($L>K$) должно обеспечивать возможность перехода в устойчивую область. При этом нужно стремиться к тому, чтобы $C_{it} > C_t$, т.е. выбирать малые S_{it}, а также полностью использовать предложение рабочей силы.

В устойчивой области положение можно сделать более стабильным посредством наращивания численности, но в силу убывания функции $C(L)$ слагаемые суммы (10) будут уменьшаться. Поэтому рациональным является нахождение в окрестности точки $L=K$ при условии $L > K$.

При $L = K$ достигается максимум СЗП, но есть опасность перехода в неустойчивую область.

Капитальные вложения (параметр S) существенно увеличивают прибыль в силу возрастающей отдачи с масштабом (6), (8), но могут перевести предприятие в неустойчивую область при незначительном предложении рабочей силы. Гарантированное наращивание основных фондов можно получить, сопоставляя величины K_{it}, L_{it}, R_t / n.

1.Колемаев В. А. Экономико-математическое моделирование. – Ульяновск: ФГУП ИПК, «УДП», 2000. – 435 с.

2.Минюк С. Л. Математические методы и модели в экономике. – Минск: ТетраСистемс, 2002. – 432 с.

3.Замков О. О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: МГУ, Дело и Сервис, 1997. – 368 с.

4.Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975. – 607 с.

5.Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе. – М.: ЮНИТИ - ДАНА, 2000. – 367 с.

Получено 04.03.2009